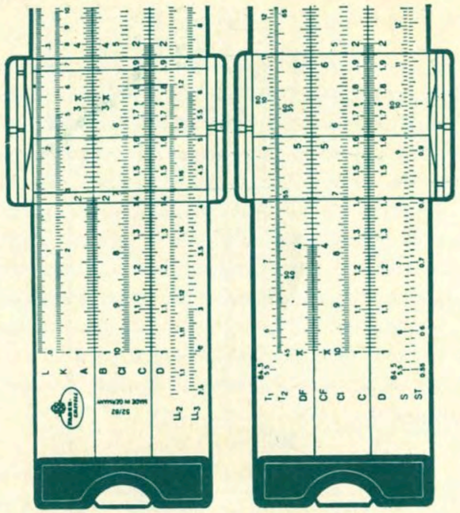
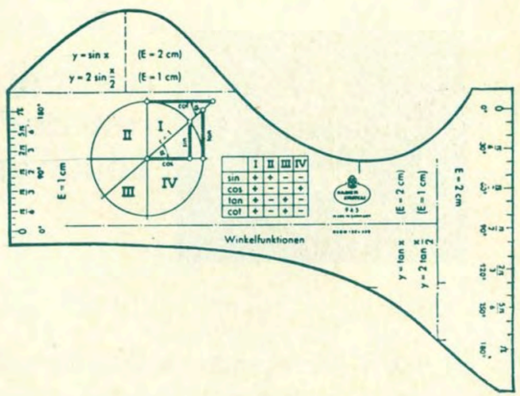


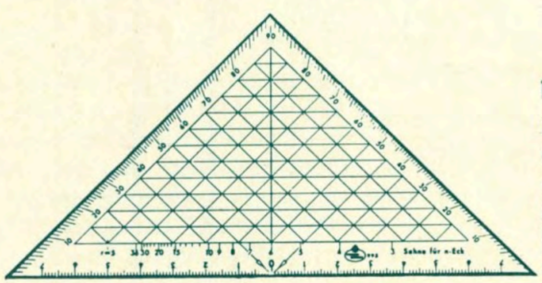
CASTELL Schul-D-Stab 52/82

Der „Castell"-Schul-D-Stab wurde als Zweiseiten-Schulrechenstab für den Unterricht an Höheren Lehranstalten und Fachschulen entwickelt. Er vereint die Exponentialskalen LL_2, LL_3, die π-versetzten Skalen CF, DF, die Skalen des Systems Rietz und die 2. Tangensskala T_2 über 45°. Die Hauptskalen auf Vorder- und Rückseite sind mit einem augenschonenden hellgrünen Farbstreifen unterlegt und treten dadurch stärker hervor. Läufer und Zunge können ungehindert bewegt werden, wenn der Stab auf der Tischplatte liegt. Jeder Stab wird in einem stabilen, durchsichtigen Plastiketui geliefert und ist mit einer ausführlichen Anleitung versehen.

Sinus-Tangens-Schablone 945

Diese Zeichenschablone aus grünem, durchsichtigen Celluloid dient dem mathematischen Zeichnen an Höheren Schulen und Fachschulen. Sie ist ein Spezialgerät zum Zeichnen von Kurven der Kreisfunktionen und enthält neben den Maßstäben für die Abszissenteilung in Grad und Bogenmaß auch ein Schema über den Funktionsverlauf.





Kombi-Winkel 993

Ein Universalgerät für Schüler und Studenten. In diesem durchsichtigen und maßbeständigen Zeichenwinkel sind Maßstab, Parallel-Lineal, Dreieck, Winkelmesser und Vieleckzeichner zweckmäßig verbunden.

A. W. FABER-CASTELL, STEIN BEI NÜRNBERG

2

1961

FABER-CASTELL

Rechenstab-Brief

Berichte und Anregungen für das Stabrechnen

Aus dem Inhalt

Verantwortliche Schriftleitung:

Dr. Peter Pirchan
Ing. Harald Bachmann

Hinweis:

Der Castell-Rechenstab-Brief wird kostenlos an Interessenten verschickt. Weitere Druckschriften können angefordert werden.

Das Rechnen mit den Kubikskalen des Rechenstabes Castell-Duplex

Von Ing. Rudolf H u b e r
(Nachdruck nur mit Bewilligung des Verfassers)

Der selbstverständliche Schritt in der Entwicklung des Rechenstabes, nicht nur die Grundskala, sondern auch die Quadratskala mit einer beweglichen Skala zu versehen, läßt es naheliegend erscheinen, auch für die Kubikskala ein Kubikskalenpaar bereit zu stellen. Diese Maßnahme wird dadurch gerechtfertigt, weil es beim numerischen Rechnen viele Beziehungen zur Kubikskala gibt, die durch eine bewegliche Kubikskala eine weit schnellere Rechendurchführung erfahren würden. Es fragt sich nur, ob es für sie eine genügend hohe Anwendungshäufigkeit gibt, die ihre Existenz auf dem Stab rechtfertigt. Die Antwort hierfür gibt die Praxis selbst, denn wenn im Schweißtechnischen Handbuch von Neumann, Berlin 1955, in den Rechenbeispielen 64mal der Ausdruck $\frac{b \cdot h^3}{12}$ zur Anwendung gelangt, dann ist es sicher, daß der Rechner das Vorhandensein einer beweglichen Kubikskala als eine wesentliche Erleichterung des Rechenganges begrüßen wird. Eine so hohe Anwendungshäufigkeit dieser Skala im praktischen Rechnen, die sich mit der jedes anderen Skalenpaares vergleichen läßt, kann als Rechtfertigung für ihre Existenz nicht abgewiesen werden.

Eine Berechnung mit Hilfe des Stabes erfordert zwei Maßnahmen: die Stellenwertbestimmung des Endwertes und die Rechendurchführung auf dem Stab. (Die Stellenwertbestimmung wird aus Zweckmäßigkeitsgründen immer vor der Stabrechnung durchgeführt.) Im allgemeinen ist man geneigt, die Rechendurchführung eines Ausdruckes mit höheren Potenzen oder Wurzeln, z. B. $a \cdot \sqrt[3]{b^2}$ als schwieriger anzusehen, als die einer Grundrechnung. Das ist aber nicht der Fall; die Schwierigkeit einer Rechendurchführung liegt objektiv betrachtet nicht darin, ob man sie auswendig kann oder erst aus einem Buch entnehmen muß; sie ist vielmehr durch die Anzahl der Koinzidenzen gegeben, die zur Durchführung eines Rechenganges notwendig sind. Die Stabrechnungen für $a \cdot b \cdot c$ und $a \cdot \sqrt[3]{b^2}$ haben den gleichen Schwierigkeitsgrad, weil zur Behandlung beider Ausdrücke zwei Koinzidenzen notwendig sind.

Anders bei der Stellenwertbestimmung, die bei höheren Potenzen und Wurzeln mitunter so undurchsichtig wird, daß sie den Rechenablauf sehr hemmend beeinflussen kann. Dies geht bei vielen Rechnern so weit, daß sie auf den Vorteil mancher Stabrechnung verzichten, ein Umstand, der einem Verlust in der Ausnützung wertvoller Rechenvorteile gleichkommt, den man sich vom Standpunkt des rationellen Rechnen aus gesehen nicht leisten kann. Man muß nämlich beim Stabrechnen zwei grundsätzliche Rechenarten unterscheiden: die Einzel- und die Reihenrechnung; die letztere ist die hintereinander folgende Wiederholung der gleichen Rechnung für die Tabellenbildung. Während es bei der Einzelrechnung nicht so sehr darauf ankommt, ob die Rechnung mit optimaler Geschwindigkeit durchgeführt wurde, ist dieser Umstand bei der Reihenberechnung ein integrierender Bestandteil. Man muß daher der Stellenwertbestimmung beim Rechnen mit der Kubikskala ein besonderes Augenmerk schenken, indem man für solche im praktischen

Rechnen oft vorkommende Ausdrücke eigene kurze Stellenwertbestimmungstäfelchen anfertigt, wie dies bei einigen Beispielen gezeigt wird. Die Anfertigung ist mit Hilfe der Normzahlen sehr einfach durchführbar; für ein rationelles Rechnen ist ihre Benützung unerläßlich.

Im folgenden werden Beispiele für den Schulunterricht und für die technischen Berufe aufgezeigt, die zum überwiegenden Teil aus der technischen Praxis stammen, so daß der Schüler und der Übende nicht mit unfruchtbaren, sondern mit berufsnahen Rechnungen zu tun haben. Da jede Rechnung für die Tabellenbildung benötigt werden kann, sind fast alle Beispiele auf die Reihenberechnung, also auf eine zwangsläufig notwendige rationelle Rechendurchführung aufgebaut. Es versteht sich geradezu von selbst, daß man sich den Grundsatz der einfachsten Rechendurchführung nicht nur bei der Reihen-, sondern auch bei der Einzelberechnung zu eigen macht.

Zu den wichtigsten Rechnungen für die Kubikskalen zählen die von den Ausdrücken $(a \cdot b)^3$, $\left(\frac{a}{b}\right)^3$, $\sqrt[3]{a \cdot b}$, $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ abgeleiteten Rechenmöglichkeiten, die in Tafel 1 mit ihren Rechendurchführungen aufscheinen. Diese Aufstellung, die sich durch Permutation noch erweitern läßt, zeigt, wieviele Ausdrücke durch die Kubikskalen behandelt werden können. Jeder Rechner tut gut daran, die Rechendurchführungen aller in seiner Praxis vorkommenden schwierigeren Rechnungen aufzuschreiben, um sie für eine spätere Verwendung bereit zu halten.

Hinweis:

Die vom Verfasser entwickelte Symbolik für eine kurze und übersichtliche Aufschreibung von Stabrechnungen erfaßt in jeder Zeile eine Koinzidenz, das ist das Zusammenfallen zweier Zahlen auf je einer Skala; Da/Cb bedeutet, daß a auf D mit b auf C zusammenfällt. Zuerst kommen die Skalenbenennungen, dann die Zahlenzeichen. Unter der unterstrichenen Skala steht das Resultat, z. B. $\frac{\text{Da Cb}}{\text{C1}\,\underline{\text{D}}}$. L ist der Läuferstrich, s entspricht Rechenzwischenwerten.

Tafel 1

$(ab)^3$	Da/Clb C1/$\underline{K}$	$\sqrt[3]{ab}$	Ka/C1 K'b/$\underline{D}$	ab^3	Db/K'1 K'a/K —	$a\sqrt[3]{b}$	Kb/K'1 Ca/$\underline{D}$
$(abc)^3$	Da/Clb Cc/$\underline{K}$	$\sqrt[3]{abc}$	Ka/C1 K'b/L L/C1 K'c/$\underline{D}$				
$\left(\frac{a}{b}\right)^3$	Da/Cb C1/$\underline{K}$	$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$	Ka/K'b C1/$\underline{D}$	$\frac{a^3}{b}$	Da/K'b K'1/$\underline{K}$	$\frac{\sqrt[3]{a}}{b}$	Ka/Cb C1/$\underline{D}$
$\left(\frac{ab}{c}\right)^3$	Da/Cc Cb/$\underline{K}$	$\sqrt[3]{\frac{ab}{c}}$	Ka/K'c K'b/$\underline{D}$	$\frac{a}{b^3}$	Ka/Cb K'1/$\underline{K}$	$\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$	Da/K'b C1/D —
$a \cdot \sqrt[3]{b^2}$	Aa/K'1 K'b/$\underline{A}$	$a \cdot \sqrt{b^3}$	Ka/B1 Bb/$\underline{K}$	$\left(\frac{1}{a}\right)^3$	Cla/K' —	$\sqrt[3]{\frac{1}{a}}$	K'a/$\underline{Cl}$
$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{b}$	A1/Bb K'a/$\underline{A}$	$\frac{\sqrt{a^3}}{b}$	K1/K'b Ba/$\underline{K}$	$\left(\frac{1}{ab}\right)^3$	D1/Ca Clb/$\underline{K}$	$\sqrt[3]{\frac{1}{ab}}$	K'a/K1 Kb/$\underline{Cl}$
$\frac{a}{\sqrt[3]{b^2}}$	Aa/K'b B1/$\underline{A}$	$\frac{a}{\sqrt{b^3}}$	Ab/K'a K1/$\underline{K'}$				

Zum Beispiel:

Überprüfe, ob $\frac{8{,}2 \cdot 16000}{5{,}3^3} < 800$; K8,2/C5,3
K'16/$\underline{K883}$

$\frac{8{,}8^4}{9{,}8^3} = ?$ D88/C98
K'88/$\underline{K6{,}39}$

Ermittle für $y = x^3 + \frac{1}{x^3} = \frac{x^6+1}{x^3}$ die Werte für $x =$

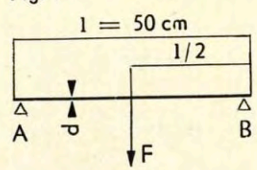
x		y
1,2	D1/Cx	2,31
1,3	Dx/K's = x^6	y = 2,65
1,4 . .	K's+1/$\underline{K}$	3,10

Das Würfelvolumen ist V = 3,8; 14; 33; 128 cm³; wie groß ist die Raumdiagonale d des Würfels? $d = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{V}$ A3/K'1
K'V/$\underline{Dd}$ (d = 2,704; 4,175; 5,56, 8,73 cm)

$0{,}48 \cdot \sqrt[6]{15} = ?$ A15/K'15
C48/$\underline{D0{,}754}$

Weitere Anwendungsbeispiele:

Fig. 1

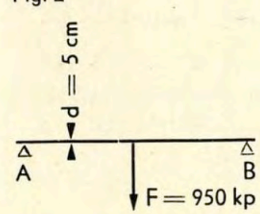


1. Wie groß ist die zulässige Belastung F der auf zwei Punkten A B ruhenden Achse mit kreisförmigem Querschnitt, wenn d = 5, 10, 15, 20 cm ist.
($\sigma b_{zul.}$ = 950 kp/cm²)

$M_{max} = \frac{F}{2} \cdot \frac{l}{2} = W \cdot \sigma b_{zul.} = 0{,}1d^3 \cdot \sigma b_{zul.}$; $F = 7{,}6d^3$

K7,6/K'1
Cd/$\underline{KF}$ (F = 950, 7600, 25600, 61000 kp)

Fig. 2



2. Eine Achse von kreisförmigem Querschnitt ruht auf zwei Punkten A B und trägt in der Mitte die zulässige Belastung F = 950 kp; wie groß ist unter gleichen Umständen die Belastung, wenn d = 6, 7, 8, 9, 10 cm ist?

Die Belastung wächst mit der dritten Potenz des Durchmessers d; deshalb gilt:

$950 : 5^3 = x : d^3$ K950/C5
Cd/$\underline{Kx}$

(x = 1640, 2610, 3900, 5550, 7600 kp)

3. Für die semikubische Parabel $y = 2{,}5x^{3/2}$ sind die y-Werte für $x = 1; 2; 3; 4 \ldots$ (bzw. für jede zweckmäßig erscheinende Abstufung von x zu ermitteln und die Parabel zu zeichnen.

K2,5/K'1
Bx/Ky

(y = 2,5; 7,08; 13; 20...)

4. Die Endwerte der Funktion $\frac{n^3 - 1}{5}$ sollen Normzahlen der Reihe R 10 (1...10) sein; wie groß ist n?

Es gilt: $\frac{n^3 - 1}{5} = NZ$; $n = \sqrt[3]{5NZ + 1}$;

K5/K'1
K'NZ/Ks = 5NZ
Ks+1/Dn

NZ	1	1,25	1,60	2,00
n	1,82	1,94	2,08	2,22

5. Der Differentialquotient für die Funktion $y = 8x^{1/3}$ lautet $\frac{dy}{dx} = \tan\tau = \frac{8}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$; wie groß ist der Tangentenneigungswinkel τ, wenn x = 12, 18, 24 ist?

$\tan\tau = \frac{2{,}67}{\sqrt[3]{x^2}}$;

A267/K'x
B1/A tan τ
D tan τ/T τ

(τ = 27,1°, 21,2°, 17,8°)

6. Wie groß ist das Trägheitsmoment J eines Rohres, wenn
die Wandstärke s = 0,2, 0,3, 0,3 cm und
der Außendurchmesser D = 13, 25, 31,5 cm ist?

Bei kleiner Wandstärke gilt: $J \approx \frac{\pi}{8} \cdot s \cdot D^3$;

Kπ/K'8
K's/L
L/C1
CD/KJ

(J = 172, 1850, 3700 cm⁴)

7. Ermittle $c = \frac{1000\,L^3}{6ab}$, wenn L = 12 a = 180 b = 250 / L = 13,5 a = 165 b = 280 ist.

DL/K'6
K'1/L
L/K'a
K'1/L
L/K'b
K'1/Kc

(c = 6,4; 8,85)

8. Wie groß ist der Durchmesser d einer Welle, die bei n = 560, 400, 720 U/min
P = 25, 19, 55 PS überträgt?

$d = 14{,}5 \cdot \sqrt[3]{\frac{P}{n}}$;

KP/K'n
C145/Dd

(d = 5,14; 5,24; 6,15 cm)

9. Ermittle $y = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$ bei x = 30°, 31°, 32°, 33°...

Sx/K'cos x (cos x entnimmt man über Sx von der P-Skala)
K1/K'y (y = 6,92, 6,25, 5,68, 5,18...)

10. Es ist die Teilung t eines Zahnrades zu berechnen; M = 720, c = 20, ψ = 2,5, z = 11.

$t = \sqrt[3]{\frac{2\pi M}{c\,\varphi\,z}} = \sqrt[3]{\frac{2\pi 720}{20 \cdot 2{,}5 \cdot 11}} = \sqrt[3]{\frac{\pi 720}{25 \cdot 11}}$;

Kπ/K'25
K'720/L
L/K'11
K'1/Dt = 2,02 cm

11. Wie groß ist der Durchmesser D einer Achse mit ringförmigem Querschnitt, wenn M_b = 8400, 12000, 39000 kpcm; $\sigma_{b_{zul.}}$ = 550 kp/cm²

$D = \sqrt[3]{\frac{M_b}{0{,}087 \cdot \sigma_{b_{zul.}}}} = \sqrt[3]{\frac{M_b}{48}}$;

K1/K'48
K'M_b/DD

(D = 5,6; 6,3; 9,34 cm)

12. Wie groß ist die Lagerentfernung von Wellen bei starker Belastung, wenn der Wellendurchmesser d = 40, 50, 63, 80 mm ist?

$L = 110\sqrt[3]{d} \ldots 50\sqrt[3]{d^2}$;

D11/C1, K'd/DL; A50/B1, K'd/AL

(L = 376..585, 405..680, 437..790, 474..930 mm)

13. Wie groß ist die Anzahl z der erforderlichen Schrauben bei Scheibenkupplungen, wenn der

Durchmesser d =	56,	60,	63,	67,	71 mm
Radius der Reibungsfläche r =	100,	108,	115,	122,	128 mm

und der Schraubenkerndurchmesser δ = 13,4 mm ist?

$z \approx \frac{d^3}{2\delta^2} \approx \frac{d^3}{360r}$;

K1/K'360
Cd/L
L/K'r
K'1/Kz

(z ≈ 5 6 6 7 8)

14. Eine rechteckige Biegungsfeder hat ein Trägheitsmoment J = 0,84 cm⁴; die Durchbiegung beträgt stets f = 1,7 cm; wie groß ist die Belastung F, wenn die Federlänge 40, 45, 50, 56, 60 cm beträgt? (E = 2100000 kg/cm²)

$F = \frac{3f \cdot E \cdot J}{l^3} = \frac{9000\,000}{l^3}$;

K9/Cl
K'1/KF

(F = 140 98,5 72 51,3 41,6 kp)

15. Um wieviel △ m ist der auf der Erdoberfläche gemessene Bogen B = 50, 60, 70, 80, 90, 100 km kürzer als die Tangente?

$\triangle_m \approx \frac{B^3 km}{122000}$;

K1/K'122
CB/K△

(△ = 1,02 1,76 2,8 4,2 5,97 8,2 m)

16. Bei einem Schraubenrad mit z = 21 Zähnen sind die ideellen Zähnezahlen z_i für β = 30°, 32°, 34°... zu ermitteln.

$z_i = \frac{z}{\cos^3\beta}$;

Cosβ/K'z
K1/K'z_i

(z_i ≈ 32 34 37...)

Berechnung des Kugelinhalts

d, r	$J \approx 0{,}5d^3$	$J \approx 4 \cdot r^3$
1	0,5	4
1,6	2	16
2,5	8	63
4	32	250
6,3	125	1000
10	500	4000
16	2000	16000
25	8000	63000
40	32000	250000
63	125000	10^6
100	500000	$4 \cdot 10^6$
160	$2 \cdot 10^6$	$16 \cdot 10^6$
250	$8 \cdot 10^6$	$63 \cdot 10^6$
400	$30 \cdot 10^6$	$250 \cdot 10^6$
630	$125 \cdot 10^6$	10^9
1000	$500 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^9$

Der Kugelinhalt beträgt:

$$\underline{J = \frac{\pi\, d^3}{6}} \quad \begin{matrix} K\pi/K'6 \\ Cd/\underline{K} \end{matrix} \qquad \underline{J = 4{,}19 r^3} \quad \begin{matrix} K4{,}19/C1 \\ Cr/\underline{K} \end{matrix}$$

Bei gleicher Einstellung können beliebig viele Kugelinhalte ermittelt werden (Tabellenbildung). Für ein hindernisfreies Rechnen kann man sich der nebenstehenden Stellenwertbestimmungstafel bedienen.

Ist der Kugelinhalt J gegeben, dann errechnet man d oder r:

$$\begin{matrix} K\pi/K'6 \\ KJ/C\underline{d} \end{matrix} \quad \text{bzw.} \quad \begin{matrix} K4{,}19/C1 \\ KJ/C\underline{r} \end{matrix}$$

Den Stellenwert für d und r erhält man aus nebenstehender Tafel.

Beispiele: Kugeldurchmesser $d = 6{,}8$ cm; $J = ?$ ($J = 164{,}6\ \text{cm}^3$)

Es sind die Kugelinhalte für $r = 2;\ 2{,}2;\ 2{,}5;\ 2{,}8;\ 3{,}2;\ 3{,}6;\ 4;\ 4{,}5;\ 5;\ 5{,}6;\ 6{,}3;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10$ mm zu ermitteln.

Gegeben sind die Kugelinhalte $J = 400,\ 500,\ 600,\ 700,\ 900,\ 1000\ \text{cm}^3$; wie groß sind die Durchmesser?

Für die Gewichtsformel einer Kugel aus Stahl $G = (0{,}1602d)^3$ ist eine Stellenwertbestimmungstafel anzufertigen.

Beziehungen zwischen dem Volumen und der Oberfläche eines Würfels

O	V	O	V
1	0,07	40	17
1,25	0,1	50	24
1,6	0,14	63	34
2	0,2	80	50
2,5	0,27	100	68
3,2	0,4	125	95
4	0,54	160	140
5	0,75	200	200
6	1	250	270
8	1,6	320	400
10	2,2	400	540
12,5	3	500	750
16	4,4	630	1100
20	6	800	1600
25	8,5	1000	2200
32	12		

Das Volumen des Würfels $V = s^3$ und seine Oberfläche $O = 6s^2$ lassen sich in eine Beziehung bringen, wodurch man aus gegebenem Volumen die Oberfläche (und umgekehrt) ermitteln kann.

$$\underline{O = 6 \cdot \sqrt[3]{V^2}} \quad \begin{matrix} A6/B1 \\ K'V/A\underline{O} \end{matrix} \ ; \quad \underline{V = \sqrt{\left(\frac{O}{6}\right)^3}} \quad \begin{matrix} A1/B6 \\ BO/K\underline{V} \end{matrix}$$

Dieses Beispiel enthält eine einfache Stabrechnung, jedoch eine sehr schwierige Stellenwertbestimmung. Ohne die nebenstehende Stellenwertbestimmungstafel hätte die Stabrechnung keine Aussicht auf eine praktische Nutzanwendung.

B e i s p i e l e :

Würfelvolumen $V = 1{,}6;\ 0{,}875;\ 22{,}5;\ 333;\ 7{,}05\ \text{dm}^3$; wie groß ist die Oberfläche?

($O = 8{,}21;\ 5{,}49;\ 47{,}8;\ 288;\ 22{,}1\ \text{dm}^2$)

Würfeloberfläche $O = 8{,}04;\ 5{,}04;\ 40{,}8;\ 285;\ 1;\ 20{,}4\ \text{cm}^2$; wie groß ist das Volumen?

($V = 1{,}55;\ 0{,}77;\ 17{,}7;\ 328;\ 0{,}068;\ 6{,}3\ \text{cm}^3$)

Anwendung des Kosinus-Satzes am Rechenstab

von Oberstudienrat Viktor Mathé am Realgymnasium in Nürnberg

Die Berechnung nicht rechtwinkliger Dreiecke läßt sich mit dem Rechenstab leicht durchführen, wenn man den Kosinus-Satz in eine logarithmisch brauchbare Form umwandelt. Der Sinus-Satz ist in seiner ursprünglichen Form schon besonders günstig für das Stabrechnen geeignet und braucht daher keine Umformung.

Von den Umformungsmöglichkeiten des Kosinussatzes sei hier eine herausgegriffen, die mir für das Stabrechnen besonders brauchbar erscheint.

Der Kosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cdot \cos\alpha$

wird durch Hinzufügen von $0 = 2\,b\,c - 2\,b\,c$

auf die Form: $a^2 = b^2 + 2\,b\,c + c^2 - 2\,b\,c - 2\,b\,c \cdot \cos\alpha$

bzw. $a^2 = (b + c)^2 - 2\,b\,c\,(1 + \cos\alpha)$ gebracht.

Aus den bekannten Beziehungen: $1 = \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}$

und $\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$

erhält man durch Addition: $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

Damit wird: $a^2 = (b + c)^2 - 2\,b\,c \cdot 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$a^2 = (b + c)^2 - 4\,b\,c \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}$

Setzt man nun: $4\,b\,c \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} = m^2$

so erhält man: $a^2 = (b + c)^2 - m^2$

bzw. $a^2 = (b + c + m)\,(b + c - m)$

und $a = \sqrt{(b + c + m)\,(b + c - m)}$.

Für das Stabrechnen wird diese Beziehung unter Benutzung der A- und BI-Skala des Duplex-2/82 besonders interessant, was durch das folgende Beispiel gezeigt werden soll.

Gegeben: $b = 5$; $c = 6$; $\alpha = 60^0$; $\frac{\alpha}{2}$ daher 30^0.

Gesucht: Die Seite a.

Über der roten Zahl 30 der S-Skala erhält man auf der A-Skala den Wert $\cos^2\frac{\alpha}{2} = 0{,}75$.

Nun wird der Wert $4 \cdot b \cdot c = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ mit BI unter den Läuferstrich gestellt und dann der Läufer auf BI 1 gebracht.

Auf der Skala D kann man dann für $m = \sqrt{4\,b\,c \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}} = 9{,}48$ ablesen.

Man bildet das Produkt $(b + c + m) \cdot (b + c - m) = (5 + 6 + 9{,}48) \cdot (5 + 6 - 9{,}48) = 20{,}48 \cdot 1{,}52$, indem man 1,52 der BI-Skala unter 20,48 der A-Skala stellt. Unter C 10 kann dann auf D für a der Wert 5,57 abgelesen werden.

Falls der Wert $4 \cdot b \cdot c$ nicht so günstig durch Kopfrechnung erhalten werden kann, ist allerdings eine Schieberbewegung mehr erforderlich. Auch mit dem Schul-D-Stab 52/82 läßt sich die Rechnung in ähnlich einfacher Weise durchführen, nur muß die Ermittlung des Produktes 4 b c mit der A- und B-Skala durchgeführt werden.

Da nun alle drei Seiten bekannt sind, können die noch fehlenden Winkel unter Anwendung des Sinussatzes (siehe Heft 1/1961) berechnet werden.

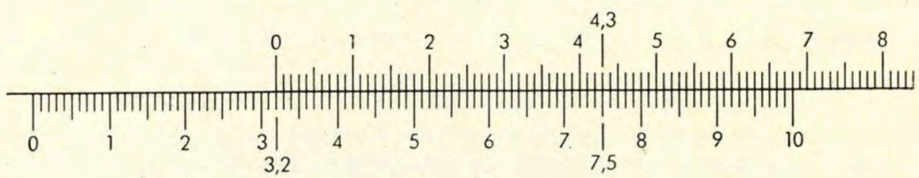
Didaktische Hinweise zum Rechenstab-Unterricht

von Oberbaurat Prof. H. Seitz, Staatsbauschule, Stuttgart

Der Unterricht in Mathematik und Physik stößt im ersten Semester der Fachschulen und Höheren Technischen Lehranstalten insofern auf besondere Schwierigkeiten, als die zu einer Unterrichtseinheit zusammengefaßten Hörer ganz verschiedene Vorkenntnisse mitbringen. Auf der einen Seite kommen etwa 20 bis 30 Prozent der Hörer aus der Volksschule bzw. den unteren Klassen der Gymnasien und haben nie etwas von Logarithmen gehört. Auf der anderen Seite aber kann und soll das Rechnen mit dem Rechenstab tunlichst bald anfangen und möglichst umfassend durchgeführt werden. Es bleibt daher zunächst nichts anderes übrig, als auf die strenge, mathematische Begründung des Rechenstabes zu verzichten und auf dem Weg über einen Analogieschluß vorzugehen.

Die Rechenoperationen erster Stufe, Addition und Subtraktion, lassen sich am Zahlenstrahl leicht veranschaulichen. Benützt man dabei zwei deckungsgleiche Maßstäbe, die gegeneinander verschiebbar sind, so ist auch rein äußerlich die Beziehung zum Rechenstab hergestellt. Und was wir an diesem Zahlenstrahl im Bereich der 1er, d. h. für die Zahlen zwischen 1 und 10, gerechnet haben, gilt genau so im Bereich der 10er, d. h. der Zahlen zwischen 10 und 100, der 100er oder 1000er usw.

Nachstehende Abbildung erläutert diesen Vorgang der Addition und Subtraktion:



3,2 + 4,3 = 7,5 bzw. 7,5 — 4,3 = 3,2 (für cm-Einheit)
32 + 43 = 75 bzw. 75 — 43 = 32 (für mm-Einheit)

Offensichtlich ist dieses graphische Rechnen am Zahlenstrahl oder den beiden Zahlenstäben denkbar einfach, so daß sich sofort die Frage aufdrängt, ob dieses Verfahren sich nicht auch auf die Rechenoperationen zweiter Stufe, Multiplikation und Division, erweitern läßt? Im Grunde genommen ist jede Multiplikation bzw. Division eine abgekürzte Summation bzw. Subtraktion. Aber wenn man dann nach diesem Verfahren statt 3 · 4 = 4 + 4 + 4 das Produkt 35 · 27 ausrechnen soll, dann sieht man sofort, daß in einer solchen ausführlichen Addition keine Vereinfachung zu suchen ist.

Mit den natürlichen Zahlen, die der Mathematiker auch als „numeri" bezeichnet, läßt sich die gesuchte Vereinfachung im Bereich der Operationen zweiter Stufe nicht durchführen. Es fragt sich daher, ob es nicht andere Zahlen, sog. „Ersatzzahlen" gibt, die die Eigenschaft haben, daß die Summe zweier solcher Ersatzzahlen gleich dem Produkt der zugehörigen „numeri" ist? In der Tat hat die Mathematik solche „Ersatzzahlen" gefunden, die man dort als „Logarithmen" bezeichnet. Man kennzeichnet diese Zahlen, die ebenfalls Dezimalbrüche sind, äußerlich dadurch, daß man an Stelle des Dezimalkommas einen Dezimalpunkt setzt. So tritt z. B. an die Stelle des Numerus 2,000 die Ersatzzahl oder der Logarithmus 0.3010.

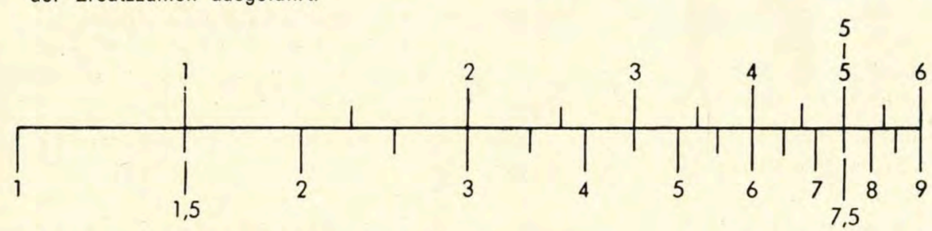
Weitere solche Ersatzzahlen entnehmen wir den sogenannten Logarithmentafeln, ohne uns darüber den Kopf zu zerbrechen, wie man diese „Ersatzzahlen" gefunden hat.

An die Stelle der natürlichen Zahlen 0 und 10 als Grundpunkte des natürlichen Zahlenstrahles treten die Ersatzzahlen 0.000 und 1.000 entsprechend der Tatsache, daß zu den natürlichen Zahlen 1,000 und 10,000 die Ersatzzahlen 0.000 bzw. 1.000 gehören. Um nun den entsprechenden Zahlenstrahl im Bereich der Ersatzzahlen zeichnen zu können, müssen wir einen bestimmten Maßstab wählen. Es ist dabei üblich, dem Abstand der Grundpunkte 0.000 und 1.000 eine Strecke von 25 cm zuzuordnen; bei Taschenrechenstäben wählt man eine Strecke von 12,5 cm. Werden höhere Genauigkeiten in der Eintragung der Ersatzzahlen verlangt, so wählt man eine Grundstrecke von 50 cm, ja sogar von 100 cm. So kommt z. B. die Ersatzzahl 0.3010 der natürlichen Zahl 2,000 in die Entfernung 0.3010 x 12,5 = 3,76 cm vom Nullpunkt des Ersatzzahlenstrahles.

Für die Einteilung des Ersatzstrahles erhält man folgende Tabelle:

Numerus	Ersatzzahl	Abstand vom Ursprung
1	0	0 x 12,5 = 0 cm
2	0,301	0,301 x 12,5 = 3,76 cm
3	0,477	0,477 x 12,5 = 5,96 cm
4	0,602	0,602 x 12,5 = 7,53 cm
5	0,699	0,699 x 12,5 = 8,74 cm
6	0,778	0,778 x 12,5 = 9,73 cm
7	0,845	0,845 x 12,5 = 10,56 cm
8	0,903	0,903 x 12,5 = 11,29 cm
9	0,954	0,954 x 12,5 = 11,93 cm
10	1,000	1,000 x 12,5 = 12,5 cm

An die so gefundenen Zwischenpunkte des Ersatzzahlenstrahles schreibt man nun die zugehörigen natürlichen Zahlen an und erreicht so, daß die Multiplikation zweier natürlicher Zahlen z. B. 1,5 · 5 durch die Addition ihrer Ersatzzahlen ersetzt werden kann. Entsprechend wird die Division zweier natürlicher Zahlen 7,5 : 5 durch die Subtraktion der Ersatzzahlen ausgeführt.



1,5 · 5 = 7,5 bzw. 7,5 : 5 = 1,5 und
15 · 50 = 750 bzw. 750 : 50 = 15 oder
1,5 · 50 = 75 bzw. 75 : 50 = 1,5

Nach gründlicher Einübung der Skalenwerte auf der sogenannten Grundskala C/D wird der Zusammenhang dieser Skala mit den x^2 (A/B)-, x^3 (K/K')- und den πx (CF/DF)-Skalen besprochen und eingeübt.

Ehe nun die gewonnenen Erkenntnisse auf praktische Rechenbeispiele angewandt werden, muß noch der Zusammenhang zwischen den Teilstrichen des Läufers geklärt werden. Stellt man den mittleren Läuferstrich auf die Zahl 4 der x^2-Skala ein, so steht der linke obere Läuferstrich bei π. Da aber einer Differenz im Bereich der Ersatzzahlen eine Multiplikation bzw. Division im Bereich der natürlichen Zahlen entspricht, so bedeutet der Übergang vom mittleren auf den linken Teilstrich der oberen x^2-Skala eine Multiplikation der durch den mittleren Läuferstrich angegebenen Zahl mit $\pi/4$. Stellt man also den mittleren Läuferstrich auf der Grundskala auf den Zahlenwert d des Durchmessers eines Kreises ein, so gibt derselbe Läuferstrich auf der x^2-Skala den Wert von d^2 an und am linken oberen Läuferstrich erhalten wir $\frac{\pi d^2}{4}$, d. h. den Inhalt des betreffenden Kreises.

Eine einfache Probe zeigt, daß derselbe Übergang von der Durchmesserzahl d der x-Skala zum Flächeninhalt $\frac{\pi d^2}{4}$ der x^2-Skala auch durch den rechten unteren und den mittleren Läuferstrich vermittelt wird. Der tiefere Grund für diese „doppelt genähte" Möglichkeit der Umrechnung vom Durchmesser d eines Kreises auf seinen Flächeninhalt F ist darin zu suchen, daß rein ziffernmäßig die Multiplikation mit $\pi/4$ (= 0,785) gleichbedeutend ist mit der Multiplikation mit dem spez. Gewicht von Eisen (γ = 7,8 g/cm^3). Eine einfache Nachprüfung ergibt nämlich, daß der linke obere Teilstrich das Gewicht von je 1 m Rundstahl in kg angibt, wenn der rechte untere Teilstrich auf die in cm gemessene Dicke des Eisens auf der Grundskala eingestellt ist.

Erst nachdem die Grundbegriffe am Rechenstab erläutert und eingeübt sind und der Schüler mit dem Ablesen und Einstellen der Skalen völlig vertraut ist, soll das praktische Rechnen mit dem Rechenstab durch das Lösen möglichst vieler Aufgaben der Praxis, unter steter Erhöhung des Schwierigkeitsgrades, beginnen.

Anwendung der Sinusschablone zur Darstellung der ersten Ableitung der Sinusfunktion

von Studienrat i. R. Walter Schock, Lübeck

Will man den numerischen Wert der ersten Ableitung für einen Punkt der Sinusfunktion praktisch darstellen, so bilde man aus y = sin x die erste Ableitung y' = cos x. Wählt man beispielsweise den Punkt P_1 für x = 60°, so erhält man y' = cos 60° = 0,5. Die Tangente am Punkt P_1 für sin x = 60° hat somit die Neigung tg α = 0,5 (siehe Fig. 1, welche mit Hilfe der Sinusschablone gezeichnet ist).

Für den Punkt P_2 für x = 90° erhält man y' = cos 90° = 0, also tg α = 0 und für den Punkt P_3 für x = 180° den Wert y' = cos 180° = —1, also tg α = —1 (mithin α = 135° oder —45°).

Diese Werte lassen sich mit Hilfe der auf der Sinus-Tangens-Schablone Nr. 945 (s. letzte Umschlagseite) aufgebrachten Schemata leicht ermitteln.

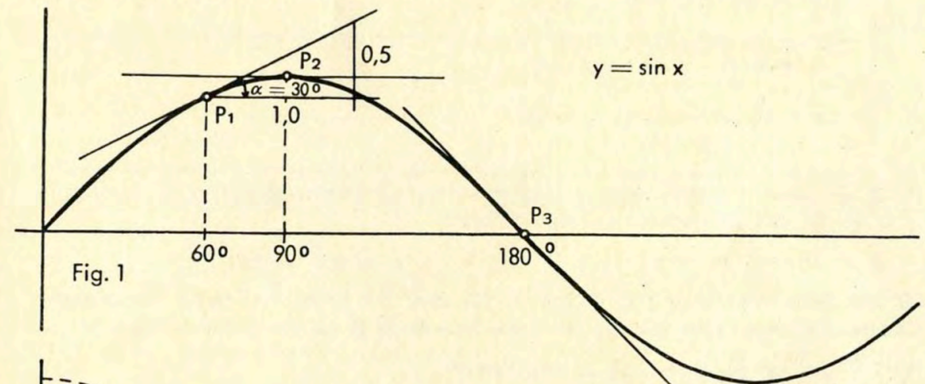


Fig. 1

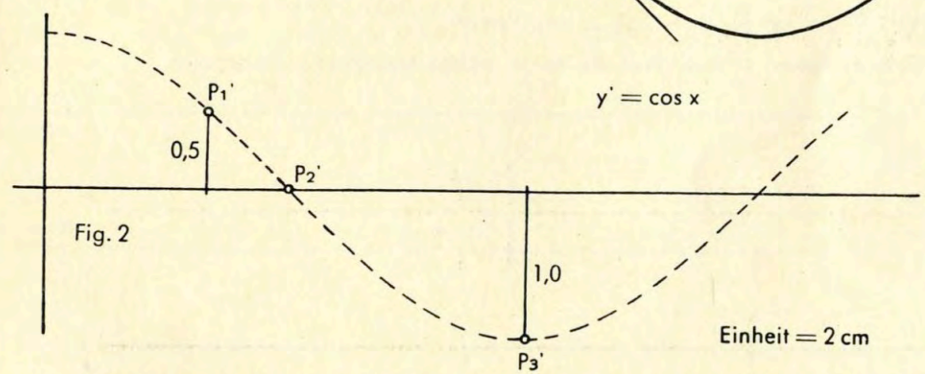


Fig. 2

Zeichnet man die so erhaltenen Werte der Ableitungen P_1'; P_2' und P_3' gemäß Fig. 2 ein, so läßt sich die Funktion der Ableitung als Cosinuslinie wieder mit Hilfe der Sinusschablone durch Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ einzeichnen.

Die Lösung kubischer Gleichungen mit dem Rechenstab

Von Ing. H. Bachmann

Im Heft 1 dieser Schriftenreihe wurde als Beispiel für die Anwendung des Rechenstabes besonderer mathematischer Aufgaben die Lösung der quadratischen Gleichung aufgezeigt. Nachfolgend wird nun in übersichtlicher Darstellung die Lösung kubischer Gleichungen mit Hilfe des Rechenstabes dargelegt, wobei sehr deutlich der Vorteil, gegenüber der sonst üblichen Anwendung der Cardanischen Formel oder des trigonometrischen Verfahrens, erkennbar ist.

In üblicher Weise bringt man die kubische Gleichung

$$z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0 = 0$$

durch Einsetzen von $z = x - \frac{a_2}{3}$ in die reduzierte Form

$$x^3 + ax + b = 0$$

wobei

$$a = a_1 - \frac{1}{3} a_2^2 \quad \text{und}$$

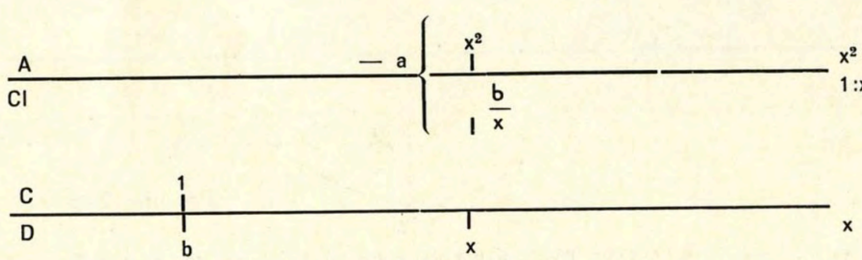
$$b = \frac{2}{27} a_2^3 - \frac{1}{3} a_1 a_2 + a_0.$$

Durch Division mit x erhält man aus der reduzierten kubischen Gleichung $x^3 + ax + b = 0$ die für das Stabrechnen günstigere Form:

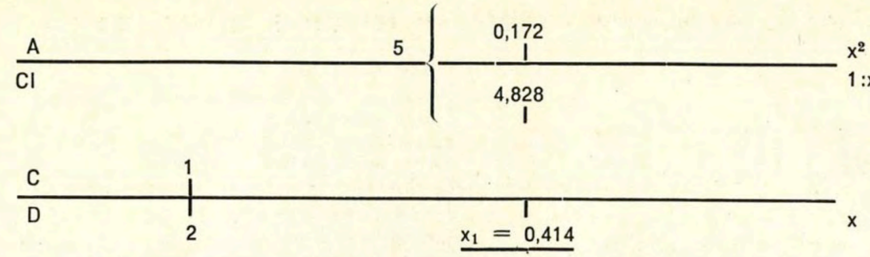
$$x^2 + \frac{b}{x} = -a$$

Mit der Schiebereinstellung C 1 (bzw. C 10) über D b findet man durch verschiedene Läufereinstellungen über den Werten x der Stab-Skala D auf der Schieber-Skala CI den Wert $\frac{b}{x}$ und auf der Stab-Skala A den Wert x^2.

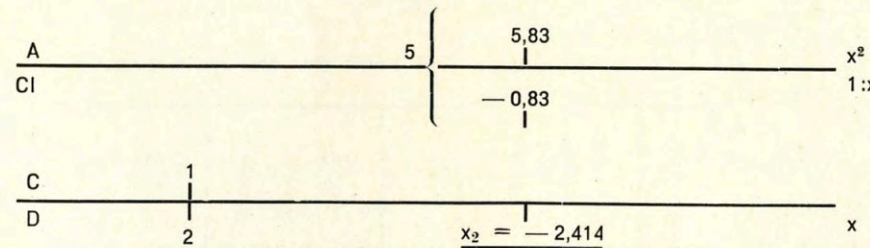
Durch Probieren ermittelt man die Werte, welche zusammen $-a$ ergeben.



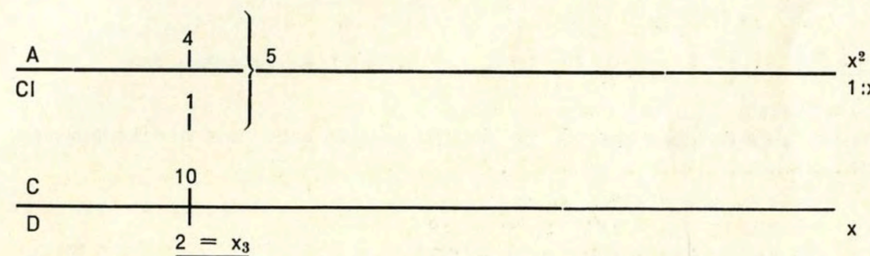
z. B.: $x^3 - 5x + 2 = 0$; $x^2 + \frac{2}{x} = 5$



$x^2 + \frac{2}{x} = 5$; $0{,}172 + 4{,}828 = 5$



$x^2 + \frac{2}{x} = 5$; $5{,}83 - 0{,}83 = 5$



$x^2 + \frac{2}{x} = 5$; $4 + 1 = 5$

Zur Probe benutzt man die Beziehung: $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

$0{,}414 - 2{,}414 + 2 = 0.$

Einen Überblick über die Wurzeln erhält man aus nachstehender Tabelle:

$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3$	< 0	drei reelle Wurzeln
	$= 0$	drei reelle Wurzeln zwei davon gleich und halb so groß wie die restliche
	> 0	eine reelle und zwei komplexe Wurzeln

Zur Berechnung der komplexen Wurzeln benutzt man die Formel:

$$x_2, x_3 = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{-a - \frac{3x_1^2}{4}}$$

Beispiele:

1. $x^3 - 0{,}84\,x + 0{,}16 = 0; \quad x^2 + \frac{0{,}16}{x} = 0{,}84$

Da $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0{,}0064 - 0{,}022 < 0$, erhält man drei reelle Wurzeln.

Einstellung:

C 10 über D 16 bzw. C 1 über D 16

A	x^2	$\left.\begin{matrix}\frac{1}{-0{,}16}\end{matrix}\right\}0{,}84$	$\left.\begin{matrix}\frac{0{,}04}{0{,}80}\end{matrix}\right\}0{,}84$	$\left.\begin{matrix}\frac{0{,}64}{0{,}20}\end{matrix}\right\}0{,}84$
CI	$\frac{b}{x}$			
D	x	-1	$0{,}2$	$0{,}8$

$x_1 + x_2 + x_3 = -1 + 0{,}2 + 0{,}8 = 0$

2. $x^3 - 0{,}84x - 0{,}16 = 0; \quad x^2 - \frac{0{,}16}{x} = 0{,}84$

Da $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0{,}0064 - 0{,}022 < 0$, hat die Lösung ebenfalls drei reelle Wurzeln.

Mit der gleichen Einstellung wie bei Beispiel 1 erhält man unter Berücksichtigung der Vorzeichen:

$1 - 0{,}16 = 0{,}84; \quad x_1 = 1$

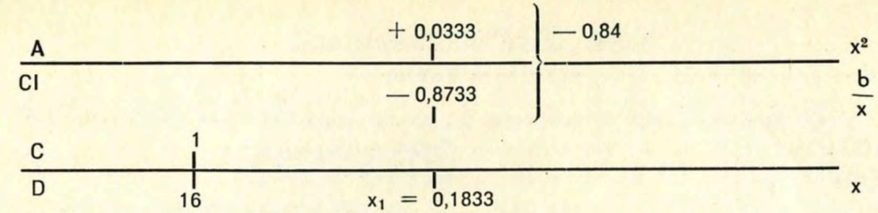
$0{,}04 + 0{,}8 = 0{,}84; \quad x_2 = -0{,}2$

$0{,}64 + 0{,}20 = 0{,}84; \quad x_3 = -0{,}8$

$x_1 + x_2 + x_3 = 1 - 0{,}2 - 0{,}8 = 0$

3. $x^3 + 0{,}84\,x - 0{,}16 = 0; \quad x^2 - \frac{0{,}16}{x} = -0{,}84$

Da $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 0{,}0064 + 0{,}022 > 0$, erhält man eine reelle und zwei komplexe Wurzeln.



Die komplexen Wurzeln sind:

$$x_2, x_3 = -\frac{x_1}{2} \pm \sqrt{-a - \frac{3x_1^2}{4}} = -0{,}09165 \pm \sqrt{-0{,}84 - 0{,}75 \cdot 0{,}0333}$$

$x_1 = -0{,}09165 + i\,0{,}93$

$x_2 = -0{,}09165 - i\,0{,}93$

$x_1 + x_2 + x_3 = 0{,}1833 - 0{,}09165 + i\,0{,}93 - 0{,}09165 - i\,0{,}93 = 0$

4. $z^3 - 3z^2 - 2z + 2 = 0$

Mit $a = a_1 - \frac{a_2^2}{3} = -2 - \frac{9}{3} = -5$ und

$b = \frac{2}{27}\,a_2^3 - \frac{1}{3}\,a_1 \cdot a_2 + a_0 = -2 - 2 + 2 = -2$

erhält man die reduzierte Form:

$x^3 - 5x - 2 = 0; \quad x^2 - \frac{2}{x} = 5$

Da $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^3 = 1 - 4{,}64 < 0$ erhält man drei reelle Wurzeln.

Einstellung:

C 1 über D 2

A	x^2	$\left.\begin{matrix}\frac{+0{,}172}{+4{,}828}\end{matrix}\right\}5$	$\left.\begin{matrix}\frac{+5{,}83}{-0{,}83}\end{matrix}\right\}5$	$\left.\begin{matrix}\frac{+4}{+1}\end{matrix}\right\}5$
CI	$\frac{b}{x}$			
D	x	$-0{,}414$	$+2{,}414$	-2

$x_1 + x_2 + x_3 = -0{,}414 + 2{,}414 - 2 = 0$

Damit werden die Wurzeln der Ausgangsgleichung:

$z_1 = x_1 - \frac{a_2}{3} = -0{,}414 + 1 = 0{,}586$

$z_2 = x_2 - \frac{a_2}{3} = 2{,}414 + 1 = 3{,}414$

$z_3 = x_3 - \frac{a_2}{3} = -2 + 1 = -1$

Die hier beschriebene Methode bewährt sich besonders bei der Verbesserung der aus dem graphischen Verfahren erhaltenen, verhältnismäßig ungenauen Ergebnisse.

Das „Sici"-Kurvenlineal

von Ing. H. Bachmann

Es sind die verschiedensten Kurvenlineale im Handel, ohne daß diese die Vielfalt der möglichen oder auch nur der gebräuchlichen Kurven erfassen können.
Das charakteristische Kennzeichen eines Kurvenstückes ist der Krümmungsradius in der Mitte eines Stückes und die „Schnelligkeit", mit der sich der Krümmungsradius ändert. Bei den Ziehkanten an Kurvenlinealen ist vorzugsweise eine Gleichmäßigkeit der Krümmungsänderung anzustreben, da die praktisch vorkommenden Funktionskurven allgemein eine Stetigkeit in der Krümmungsänderung aufweisen.
Während sich die Ziehkanten der üblichen Kurvenlineale auf verschiedene Kurvenbögenabschnitte mehr oder weniger beliebiger und zusammenhangloser Krümmungsabstufungen gründen, ist bei dem „Sici"-Kurvenlineal auf eine Stetigkeit der K r ü m m u n g s - ä n d e r u n g besondere Rücksicht genommen worden. Die Kurvenschar ist auf mathematischer Grundlage aufgebaut. Die einzelnen Kurven des Lineals entsprechen der Beziehung:

$$\triangle k_r = \frac{100}{L} \ln \frac{R_1}{R_2} \quad \text{bzw.} \quad L = \frac{100}{\triangle k_r} \ln \frac{R_1}{R_2}.$$

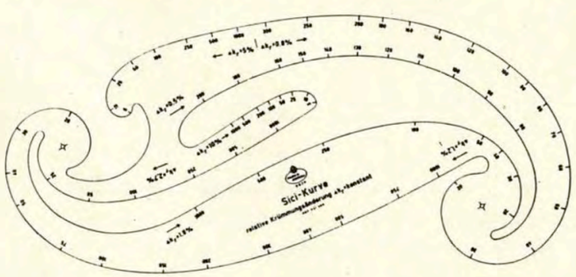
In dieser Formel bedeuten:

$\triangle k_r$ = die relative Krümmungsänderung je mm Kurvenlänge in % (jeweils an der Einzelkurve vermerkt)

R_1 und R_2 = Krümmungsradien in mm (einige dieser Werte sind als Richtpunkte durch Teilstriche markiert)

L = die Länge des zu betrachtenden Kurvenstückes in mm

Die Krümmungsradien R sind an den einzelnen Kurven durch Teilstriche gekennzeichnet. Außerdem ist an jeder Kurve die konstante relative Krümmungsänderung $\triangle k_r$ angeführt. Dieses Kurvenlineal eignet sich daher sowohl zum Zeichnen von Kegelschnittkurven als auch für Spiralen, Kettenlinien und andere mathematische aber auch praktisch empirische



Kurven. Mit besonderem Vorteil wird dieses Gerät bei der Einzeichnung von Schleppkurven (Traktrix) im Fahrzeug- und auch Straßenbau verwendet. Dem Konstrukteur im Maschinenbau leistet dieses Lineal beim Zeichnen von Kurvenscheiben, Wälzbahnen, Abrundungen an Maschinenteilen usw. wertvolle Dienste. Infolge der sanften stetigen Kurvenübergänge eignet es sich sehr gut für Arbeiten in der Strömungstechnik.
Bei Benutzung des „Sici"-Kurvenlineals ist man in der Lage, Krümmungen direkt zu messen und Krümmungsänderungen verhältnismäßig genau festzustellen.